РОССИЙСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
"КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ"

На правах рукописи
УДК 517.945.7

КОТЕЛЬНИКОВ Геннадий Александрович

НОВЫЕ СИММЕТРИИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ И КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

01.04.02 - теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва - 1999

Работа выполнена в Российском Научном Центре "Курчатовский Институт"

Официальные оппоненты:

д.ф.м.н., профессор,	ОИЯИ, Дубна	М.К.Волков
д.ф.м.н., профессор,	ФИАН, Москва	В.И.Манько
д.ф.м.н., с.н.с.,	РНЦ КИ, Москва	И.М.Павличенков

Ведущая организация: Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова

Защита состоится *6 октября 1999 г.* на заседании диссертационного Совета Д 034.04.02 в РНЦ "Курчатовский институт" по адресу: 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке РНЦ "Курчатовский институт"

Автореферат разослан *30 июня 1999 г.*

Ученый секретарь диссертационного
Совета, кандидат физико-
математических наук М.Д. Скорохватов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Симметрийные свойства уравнений содержат важную информацию об объектах исследований и оказывают существенное влияние на естественно-научные представления в физике. Примером может служить релятивистское учение о пространстве-времени, возникшее, как известно, в результате исследования пространственно-временных симметрий уравнений Максвелла. В диссертационной работе продолжено дальнейшее изучение симметрий фундаментальных уравнений теоретической и математической физики в плоском пространстве-времени. В качестве объектов исследования были выбраны уравнения Даламбера, Дирака, Максвелла и Шредингера.

Научная новизна. Традиционно изучение симметрийных свойств отмеченных уравнений проводится либо в пространстве Минковского $M^4(ct, \mathbf{x})$, либо в пространстве классической физики $R^3(\mathbf{x})XT^1(t)$. Для изучения симметрий предложено несколько приемов, например: метод замены переменных (Фойгт-1887), алгоритм Ли (Ли-1874, Ли и Энгель-1888)[1], модифицированный алгоритм Ли (Нидерер-1972, Фущич и Никитин-1990), теоретико-алгебраический подход (Малкин и Манько-1965, Кирьякополус-1968, Манько-1972), алгоритмы поиска обобщенных (Беклунд-1876; Ли и Энгель-1890), нелиевых (Фущич-1978, Фущич и Никитин-1983) и условных (Воробьев-1986, Олвер и Розенау-1986, Фущич, Штелень и Серов-1989) симметрий. В результате было установлено, что максимальной группой симметрии уравнений Даламбера и Максвелла в пространстве M^4 является конформная группа C_{15}, а максимальной группой симметрии уравнения Шредингера в пространстве R^3XT^1 является группа Шредингера Sch_{13}. Отсюда можно заключить, что для получения дополнительной информации необходимо либо перейти к пространствам иных размерностей, либо видоизменить алгоритмы поиска симметрий. В диссертационной работе было сделано и то, и другое, а именно: прове-

[1]Цитируется по монографии: Н.Х. Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике. - М.: Наука, 1983, с. 138, 142, 154, 267, 274.

дено обобщение модифицированного алгоритма Ли, и введено 5-пространство $V^5(x^0, \mathbf{x}, c)$, содержащее пространство Минковского как подпространство на гиперплоскости c=const. (Здесь $x^0 = ct$, t - время, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ - пространственные координаты, c-скорость света).

Научное и практическое значение. Развитые в диссертации методы исследования симметрийных свойств уравнений Даламбера, Максвелла, Шредингера и Дирака и полученные результаты могут найти применение при изучении и физической интерпретации симметрийных свойств уравнений теоретической и математической физики в классической и квантовой теории поля.

Целью диссертационной работы является:

- формулировка нового алгоритма исследования симметрийных свойств линейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) теоретической и математической физики;
- применение алгоритма для симметрийного анализа уравнений Даламбера, Максвелла и Шредингера;
- введение 5-мерного пространства событий, в котором скорость света образует дополнительную пятую координату, и исследование симметрийных свойств уравнений классической электродинамики в этом пространстве;
- исследование дискретных симметрий уравнений Максвелла и Дирака на гиперплоскостях $c = +3 \cdot 10^{10}$ и $c = -3 \cdot 10^{10}$ см/сек в 5-мерном пространстве событий;
- исследование нелиевых внутренних симметрий свободных уравнений Максвелла;
- формулировка релятивистски инвариантных нелинейных уравнений Максвелла;
- выяснение возможной взаимосвязи новых симметрий с физикой.

Апробация работы. Результаты, вошедшие в диссертацию, докладывались и обсуждались на следующих научных мероприятиях:

- сессиях Отделения общей и ядерной физики ИАЭ им. И.В. Курчатова 1983-1992;
- сессиях Отделения ядерной физики АН СССР, МИФИ, Москва-1978, ИТЭФ, Москва-1981;
- IV, V, VI - Советских гравитационных конференциях "Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации", Минск-1976, Москва-1981, Москва-1984;
- симпозиуме "Актуальные проблемы физической картины мира", физфак МГУ, Москва-1984;
- Международных конференциях "Теоретико-групповые методы в физике", Звенигород-1979, Звенигород-1982, Юрмала-1985, Москва-1990;
- Школе-семинаре "Теория представлений и групповые методы в физике", Тамбов-1989;
- коллоквиуме "Симметрийные методы в физике", Обнинск-1992;
- Международной конференции "Ньютон и проблемы механики твердых и деформируемых тел", С.-Петербург-1993;
- Международной конференции "Симметрии в нелинейной математической физике", Киев-1995;
- Научной конференции Отделения ядерной физики РАН "Фундаментальные взаимодействия элементарных частиц", ИТЭФ, Москва-1995;
- VII и VIII Международных конференциях "Симметрийные методы в физике", Дубна-1995, Дубна-1997;

- V Международной конференции "Сжатые состояния и соотношение неопределенности", Балатонфурд, Венгрия, 1997.
- Международном конгрессе "Фундаментальные проблемы естествознания", Санкт-Петербург, 1998.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 60 работ, включая препринты ИАЭ им. И.В. Курчатова и РНЦ "Курчатовский Институт", труды конференций, статьи в периодической печати (журналы: Вестник Московского Университета, серия Физика-Астрономия; Известия ВУЗов, серия Физика; Теоретическая и Математическая Физика; Письма в ЖЭТФ; Ядерная Физика; Nuovo Cimento; Journal of Mathematical Physics (Ukraina); Galilean Electrodynamics (USA); в сборнике Вопросы Атомной Науки и Техники (ВАНТ) серии Общая и ядерная физика и Ядерно-физические исследования (Теория и эксперимент), в книгах Экспериментальные тесты теории гравитации, Photon and Poincaré Group.

Основные результаты, выносимые на защиту.

1. Формулировка обобщенного модифицированного алгоритма Ли. Основными отличительными признаками алгоритма являются: переход к дифференциальным операторам симметрии, удовлетворяющим на решениях линейного ДУЧП коммутационным соотношениям более высокого порядка нежели первый с оператором исследуемого уравнения; введение в закон преобразования поля некоторой мультипликативной весовой функции, не являющейся компонентой поля; интерпретация совместности системы зацепляющихся уравнений, состоящей из исходного уравнения и уравнения, полученного заменой переменных из исходного, как условия перехода в себя исходного уравнения.
2. Доказательство Галилей-инвариантности уравнений Даламбера и Максвелла и доказательство релятивистской инвариантности уравнения Шредингера на уровне коммутационных

соотношений второго порядка операторов уравнения с операторами симметрии. Распространение уравнения Шредингера на релятивистскую область движений, где масса частицы зависит от скорости.

3. Введение 5-мерного пространства событий, в котором роль пятой координаты играет скорость света. Построение алгебры инвариантности и конечномерных групп симметрии уравнений Максвелла в этом пространстве. Кинематическая параметризация групповых параметров, допускающая введение квазиньютонового единого времени.

4. Дискретные симметрии уравнений Максвелла и уравнений квантовой теории на гиперплоскостях $c = +3 \cdot 10^{10}$ и $c = -3 \cdot 10^{10}$ см/сек в 5-мерном пространстве событий. Взаимосвязь оператора зарядового сопряжения C с оператором Q, индуцируемым преобразованием инверсии скорости света $(x^0 \to x^0, \mathbf{x} \to \mathbf{x}, c \to -c)$.

5. Построение бесконечномерной алгебры внутренних симметрий свободных уравнений Максвелла, как частный случай содержащей 16-мерную алгебру Ли и алгебру Грассмана, и 16-мерную супералгебру.

6. Формулировка новой версии релятивистски инвариантных нелинейных уравнений Максвелла.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, шести глав основного содержания, заключения и списка литературы, включающего 288 наименований, 276 страниц машинописного текста (256 страницы основного содержания).

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава 1 посвящена изложению обобщенного модифицированного алгоритма Ли и его применению для изучения симметрий уравнений Даламбера, Максвелла и Шредингера в 4-мерном пространстве событий.

1.1. Обобщенный модифицированный алгоритм Ли

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение в частных производных (ДУЧП)

$$L\phi(x) = 0. \tag{1}$$

Под симметрией этого уравнения будем понимать совокупность операторов Q, результат $(p-1)$ - кратного воздействия на которые оператора L переводит решение $\phi(x)$ в решение этого же уравнения $\phi'(x) = L^{p-1}Q\phi(x) \neq 0$, или в эквивалентном виде

$$[L\ [L \ldots [L, Q] \ldots]\ ]_{(p-\text{раз})}\phi(x) = 0. \tag{2}$$

(При $p = 1$ определение (2) переходит в общепринятое из работы Малкина и Манько[2].) В соответствии с порядком коммутационного соотношения, условимся называть операторы $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $\ldots$операторами симметрии первого, второго и т.д. порядков. До сих пор симметрийный анализ ДУЧП во всех перечисленных выше подходах не выходил за рамки операторов симметрии первого порядка. Выходом за данное ограничение и определяется новизна получаемых результатов. При этом явный вид операторов, например, $Q^{(2)}$ находится по аналогии с модифицированным[3] алгоритмом Ли путем приравнивания коэффициентов при одинаковых производных в левой и правой частях операторного равенства

$$[L\ [L, Q]\ ] = \zeta(x)L, \tag{3}$$

и интегрирования получившейся системы дифференциальных уравнений, где $Q^{(2)} = \xi(x)\partial/\partial x + \eta(x)$; $\zeta(x)$, $\xi(x)$, $\eta(x)$ - неизвестные

---
[2] И.А. Малкин, В.И. Манько, Письма в ЖЭТФ, 1965, т. 2, N 5, с. 230-234.

[3] U. Niederer, Helv. Phys. Acta, 1972, v. 45, N 5, p. 802-810.

функции. Совокупность так найденных операторов $Q^{(2)}$ совместно с операторами $Q^{(1)}$ определяет некоторую алгебру Ли. Переход от алгебры к группе преобразований пространственно-временных переменных осуществляется путем интегрирования уравнений Ли $dx'/d\theta = \xi(x')$, где $x'_{(\theta=0)} = x$, θ - групповой параметр. Отыскание закона преобразования полевых функций производится с помощью некоторой весовой функции $\Phi(x)$, такой, что

$$\phi'(x') = \Phi(x)\phi(x). \tag{4}$$

Функция $\Phi(x)$ находится из системы зацепляющихся уравнений

$$A\Phi(x)\phi(x) = 0, \;\; L\phi(x) = 0. \tag{5}$$

Из них первое получено путем замены переменных из исходного уравнения $L'\phi' = 0$. Если здесь $A = L$, симметрию будем называть классической (лиевой), если $A \neq L$ - обобщенной (нелиевой). Критерием существования последней является совместность уравнений, входящих в систему (5). Решая систему, каждой полевой функции $\phi(x)$ может быть поставлена в соответствие весовая функция $\Phi(x)$, которая и обеспечивает переход исходного уравнения в себя. В результате задачу о нахождении симметрий уравнения $L\phi = 0$ можно в определенном смысле считать завершенной. А именно: указывается совокупность операторов симметрии и соответствующих им алгебр Ли для $p = 1$, $p = 2$; по алгебрам восстанавливаются группы симметрии; с помощью весовых функций определяются трансформационные свойства поля $\phi(x)$. По двум признаком так найденные симметрии отличаются от найденных согласно стандартному алгоритму Ли в классической, либо модифицированной версиях: обращению к коммутационным соотношениям (2) более высокого порядка, и использованию нелиевского условия симметрии (5). Дело в том, что входящее в (5) уравнение $A\Phi(x)\phi(x) = 0$ не является инвариантным в смысле Ли, поскольку в общем случае $A \neq L$. Поэтому оно определено на множестве решений $\{\Phi\phi\}$, отличном от множества $\{\phi\}$. Однако на подмножестве решений при условии выбора весовой функции Φ в виде $\Phi(x) = \phi'(x' \to x)/\phi(x)$, где $\phi'(x')$ - некоторое решение исходного уравнения в штрихованной системе отсчета, уравнения $A\Phi\phi = 0$ и $L\phi = 0$ оказываются совместными, и из $L'\phi' = 0$ следует $L\phi = 0$.

Если в (2) положить $p = 1$, то теория может быть сведена к модифицированному алгоритму Ли, результаты применения которого в пространствах M^4 и R^3XT^1 известны: уравнения электродинамики C_{15} - инвариантны, уравнение Шредингера Sch_{13} - инвариантно. Поэтому положим $p > 1$, и рассмотрим примеры обобщенных, нелиевых симметрий при $p = 2$ в пространстве классической физики R^3XT^1 и пространстве Минковского M^4.

1.2. Галилей-инвариантность уравнения Даламбера

Исходим из уравнения $L\phi = \Box\phi = (\partial_{tt}/c^2 - \triangle)\phi = 0$, его решения $\phi = exp[-i\omega(t - \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}/c)]$, и будем рассматривать их в пространстве классической физики R^3XT^1. Введем преобразования Галилея

$$x' = x - Vt;\ y' = y;\ z' = z;\ t' = t;\ c' = \sqrt{1 - 2\beta n_x + \beta^2}\ c, \qquad (6)$$

которые в отличие от традиционной записи дополнены галилеевским преобразованием скорости света. (Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{c}/c$ - направляющий вектор скорости света $\mathbf{c}$, $\beta = V/c$). Генератор $H = t\partial_x$ преобразований (6) и оператор Даламбера $\Box$ удовлетворяет коммутационным соотношениям $[\Box\ [\Box, H]\ ] = 0$. Это означает, для уравнения $\Box\phi = 0$ генератор преобразований Галилея (6) является оператором симметрии второго порядка.

Условия перехода уравнения Даламбера в себя и весовая функция имеют вид:

$$A\Phi(x)\phi(x) = [(\partial_t/c + \beta\partial_x)^2/\lambda^2 - \Delta]\Phi(x)\phi(x) = 0,\ \Box\phi(x) = 0; \quad (7)$$

$$\Phi(x) = exp\{-i[(1-\lambda)\omega(t - \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}/c) - \beta\omega(n_x t - x/c)]/\lambda\}. \qquad (8)$$

Трансформационные свойства поля суть:

$$\phi'(x') = \Phi(x)\phi(x) \to exp(-ik'\cdot x') =$$
$$exp\{-i[(1-\lambda)\omega(t - \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}/c) - \beta\omega(n_x t - x/c)]/\lambda\}\cdot exp(-ik\cdot x). \qquad (9)$$

Если правую часть равенства (8) преобразовать к штрихованным переменным с помощью преобразований Галилея (6), то в итоге получится функция $\phi' = exp[-i\omega'(t' - \mathbf{n}'\cdot\mathbf{x}'/c')]$, являющаяся решением уравнения $\Box'\phi'(x') = 0$. То-есть в силу условия $A\Phi(x)\phi(x) = 0$, уравнение $\Box\phi(x) = 0$ перешло в себя $\Box'\phi'(x') = 0$ в соответствии с традиционным пониманием симметрии. Здесь $\lambda = c'/c$; t - время; c - скорость света; $\mathbf{n} = \mathbf{c}/c$, ω - частота.

Инвариантности уравнения Даламбера соответствует Галилей-инвариантность уравнения светового конуса (можно убедиться непосредственной проверкой):

$$c'^2t'^2 - \mathbf{x}'^2 = 0 \rightarrow \ (Galilei\,transformations) \rightarrow c^2t^2 - \mathbf{x}^2 = 0. \quad (10)$$

При этом величины c' и c пробегают непрерывный спектр значений согласно галилеевой теореме сложения скоростей, и скорости распространения света в уравнениях Даламбера $\Box\phi = 0$ и светового конуса $c^2t^2 - \mathbf{x}^2 = 0$ становятся произвольными.

1.3. Галилей-инвариантность уравнений Максвелла

Исходим из уравнений $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$; $\nabla \mathrm{X}\mathbf{H} - \partial_t\mathbf{E}/c = 0$; $\nabla\cdot\mathbf{H} = 0$; $\nabla \mathrm{X}\mathbf{E} + \partial_t\mathbf{H}/c = 0$ и их решений $(\mathbf{E},\mathbf{H}) = (\mathbf{l},\mathbf{m})\cdot exp[-i\omega(t - \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}/c)]$, где $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ - вектора поляризации. Закон преобразования поля будем искать в виде

$$\begin{array}{ll} \mathrm{E}'_x = \Phi(x)\mathrm{E}_x; & \mathrm{H}'_x = \Phi(x)\mathrm{H}_x; \\ \mathrm{E}'_y = \Phi(x)k(\mathrm{E}_y + h_{yz}\mathrm{H}_z); & \mathrm{H}'_y = \Phi(x)k(\mathrm{H}_y + e_{yz}\mathrm{E}_z); \\ \mathrm{E}'_z = \Phi(x)k(\mathrm{E}_z + h_{zy}\mathrm{H}_y); & \mathrm{H}'_z = \Phi(x)k(\mathrm{H}_z + e_{zy}\mathrm{E}_y). \end{array} \quad (11)$$

Здесь Φ - весовая функция (8); $k, e_{23}, e_{32}, h_{23}, h_{32}$ - параметры преобразований. С помощью алгоритма из раздела 1 можно убедиться, что

$$\begin{array}{l} k = +[n_x(\beta - n_x) + \lambda]/(1 - {n_x}^2); \\ e_{yz} = +[n_x(\lambda - 1) + \beta]/[n_x(\beta - n_x) + \lambda]; \\ h_{zy} = -[n_x(\lambda - 1) + \beta]/[n_x(\beta - n_x) + \lambda]; \\ e_{yz} = -e_{zy} = h_{zy} = -h_{yz}. \end{array} \quad (12)$$

Инварианты поля суть $\mathbf{E}'\cdot\mathbf{H}' = k^2\Phi^2\mathbf{E}\cdot\mathbf{H} = 0$, $E'^2 - H'^2 = k^2\Phi^2(E^2 - H^2) = 0$. При $\beta \rightarrow 0$ весовая функция $\Phi \rightarrow 1$, а преобразования полей принимают известный из релятивистской теории вид

$$\mathbf{E}' \approx \mathbf{E} + \beta \mathrm{X} \mathbf{H};\ \mathbf{H}' \approx \mathbf{H} - \beta \mathrm{X} \mathbf{E}. \tag{13}$$

В результате формулы (13) оказываются общими как для релятивистски, так и для Галилей-инвариантной теории. Ситуация здесь аналогична случаю с преобразованиями пространственно-временных переменных. Устремляя параметр β к нулю, из преобразований (6) получаем:

$$x' = x - Vt;\ y' = y;\ z' = z;\ t' = t;\ c' = c. \tag{14}$$

Не являясь ни галилеевскими, ни релятивистскими, эти преобразования представляют собой предельные соотношения для обоих случаев, и именно они и использовались при доказательстве Галилей-неинвариантности уравнения светового конуса, что, конечно, нелогично.

Применение алгоритма из раздела 1.1 настоящей Главы к подсистемам уравнений Максвелла привело к результату, известному из литературы. Первая пара уравнений $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, $\nabla \mathrm{X} \mathbf{H} + \partial_0 \mathbf{E} = 0$ инвариантна относительно преобразований Галилея в стандартном смысле, если поля трансформировать по правилу $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$, $\mathbf{H}' = (\mathbf{H} - \beta \mathrm{X} \mathbf{E})/\lambda$; аналогично, вторая пара уравнений $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, $\nabla \mathrm{X} \mathbf{E} - \partial_0 \mathbf{H} = 0$ Галилей-инвариантна, если $\mathbf{E}' = (\mathbf{E} + \beta \mathrm{X} \mathbf{H})/\lambda$, $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$ (Le Bellac and Levy-Leblond - 1973, Фущич и Никитин - 1983).

1.4. Лоренц-инвариантность уравнения Шредингера

Исходим из перестановочных соотношений $[L_S[L_S, M_{0k}]] = 0$, где L_S - оператор уравнения Шредингера $L_S\psi(x) = 0$, M_{0k} - генератор преобразований Лоренца, $x^0 = ct$, $x^k = (x, y, z)$, $k = 1, 2, 3$. Согласно расширенному определению симметрии (2), генераторы M_{0k} для уравнения Шредингера являются операторами симметрии типа $p = 2$. Формулы преобразования волновых функций $\psi(x)$, индуцированные преобразованиями Лоренца, могут быть установлены с помощью системы уравнений (5). Имея это в виду, распространим уравнение $L_S\psi(x) = 0$ на релятивистскую область движений путем замены массы покоя m_0 на релятивистское значение массы $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$. Рассмотрим так модифицированное уравнение (условимся называть релятивистским уравнением Шредингера) и его решения в пространстве Минковского M^4:

$$L_S{}^r\psi^r(x) = (i\hbar\partial_t + c^2\hbar^2\Delta/2W)\psi^r(x) = 0; \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\psi^r{}_1(x) &= exp[-i(mv^2/2\hbar)(t - 2\mathbf{s}\cdot\mathbf{x}/v)];\\ \psi^r{}_2(x) &= exp[-i(mc^2/\hbar)(t - \sqrt{2}\mathbf{s}\cdot\mathbf{x}/c)].\end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $W = mc^2 = m_0c^2/\sqrt{1-\beta^2}$ - релятивистское значение энергии частицы, $\mathbf{s} = \mathbf{v}/v$, $\mathbf{x} = (x,y,z)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ - скорость частицы.

Условия перехода уравнения (15) в себя выглядят следующим образом

$$A\Psi^r(x)\psi^r(x) = \Big\{i\hbar(\partial_t + V\partial_x) + \frac{c^2\hbar^2(1-V^2/c^2)}{2W(1-Vv_x/c^2)}\Big[\frac{(\partial_x + V\partial_t/c^2)^2}{(1-V^2/c^2)} + \partial_{yy} + \partial_{zz}\Big]\Big\}\Psi^r(x)\psi^r(x) = 0,\ L_S{}^r\psi^r(x) = 0. \tag{17}$$

Весовые функции довольно громоздки, и в качестве примера выпишем только одну из них:

$$\begin{aligned}\Psi^r{}_1(x) = exp\Big\{&-i\frac{W}{2\hbar(1-\beta^2)}[(\beta_v'^2 - 2\beta^2 - \beta_v{}^2(1-\beta^2) - \\ &\beta\beta_x(\beta_v'^2 - 2))t - (\beta_v{}'^2 - 2)(\beta - \beta^2\beta_x)x/c]\Big\}, \S\end{aligned} \tag{18}$$

где $\beta = V/c$, $\beta_v = v/c$, $\beta_x = v_x/c$. Трансформационные свойства волновых функций описываются соотношением (4). В нерелятивистском приближении уравнение (15), решение $\psi^r{}_1(x)$ и его трансформационные свойства принимают известный вид:

$$\begin{gathered}L_S{}^r\psi^r(x) = 0 \to (i\hbar\partial_t + \hbar^2\,\Delta\,/2m_0)\psi(x) = 0;\\ \psi^r{}_1(x) \to \psi_1(x) = exp[-i(\mathcal{E}t - \mathbf{x}\cdot\mathbf{p})/\hbar];\\ \psi'^r{}_1(x') = \Psi^r{}_1(x)\psi^r{}_1(x) \to\\ \psi_1'(x') = exp[-i(Et + xP)/\hbar]\cdot exp[-i(\mathcal{E}t - \mathbf{x}\cdot\mathbf{p})/\hbar].\end{gathered} \tag{19}$$

($E = m_0 V^2/2$, $P = m_0 V$, $\mathcal{E} = m_0 v^2/2$, $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}$, m_0 - масса покоя частицы). Второе решение уравнения (15) преобразуется к виду

$$\psi^r{}_2(x) \to \psi_2(x) = exp[-i(m_0 c^2/\hbar)(t - \sqrt{2}\mathbf{s}\cdot\mathbf{x}/c). \qquad (20)$$

Это новое, линейно-независимое решение нерелятивистского уравнения Шредингера (определители Вронского для решений $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ отличны от нуля). Нормированные на 3-мерную δ - функцию эти решения можно записать как

$$\psi_1 = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-i(k^0 x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}; \psi_2 = \frac{(\beta_v/\sqrt{2})^3}{(2\pi)^3} e^{-i(2k^0 x^0/\beta^2 - \sqrt{2}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}/\beta)}, \qquad (21)$$

где $k^0 = m_0 v^2/2\hbar c$, $\mathbf{k} = m_0 \mathbf{v}/\hbar$.

В случае безмассовой частицы, движущейся со скоростью света "c", энергией W и импульсом $P = W/c$ решения уравнения (15) приводят к результату:

$$\begin{aligned} \psi^r{}_1(x, \beta = 1) &= exp[-i(W/2\hbar)(t - 2\mathbf{s}\cdot\mathbf{x}/c)]; \\ \psi^r{}_2(x, \beta = 1) &= exp[-i(W/\hbar)(t - \sqrt{2}\mathbf{s}\cdot\mathbf{x}/c)]. \end{aligned} \qquad (22)$$

Фазовая скорость распространения первой волны составляет величину $c/2$, второй - величину c/$\sqrt{2}$. Обе волны отстают от частицы, движущейся со скоростью "c", и вакуум проявляет себя как среда с коэффициентом преломления $n = 2$ и $n = \sqrt{2}$ соответственно. Тем самым релятивистская симметрия модифицированного уравнения Шредингера позволяет установить, что возможно существование безмассовых полей, распространяющихся со скоростью, меньшей скорости света, что напоминает распространение черенковского излучения, либо распространение звука от источника, движущегося со сверхзвуковой скоростью.

1.5. Сопоставление симметрий

Итак, на решениях уравнений Шредингера, Даламбера и Максвелла реализуются как релятивистская, так и галилеева симметрии. В соответствии с терминологией алгоритма из раздела 1.1 их можно классифицировать следующим образом.

Уравнение(я) Симметрии	Шредингера	Даламбера	Максвелла
Галилея	В смысле Ли, p=1	Обобщенная, p=2	Обобщенная, p=2
Лоренца	Обобщенная, p=2	В смысле Ли, p=1	В смысле Ли p=1

Приведенные результаты означают, в электродинамике реализуется не только релятивистский, но и принцип относительности Галилея. Нерелятивистская квантовая механика допускает введение как принципа относительности Галилея, так и специального принципа относительности. С точки зрения симметрийного подхода обе версии принципа относительности являются равноправными.

Глава 2 посвящена исследованию симметрий уравнений Максвелла в 5-пространстве с неинвариантной скоростью света. С этой целью было введено 5-пространство событий, в котором скорость света "c" пробегает непрерывный спектр значений от $-\infty$ до $+\infty$. Рассмотрена алгебра Ли прямой суммы генераторов P_a, M_{ab}, D, K_a $(a, b = 0, 1, 2, 3)$ подалгебры конформной группы C_{15}, и генераторов бесконечной алгебры Вирасоро $X_n = c^n[c\partial_c - t\partial_t + N(t\partial_t + \mathbf{x} \cdot \partial)]$:

$$[g_s, g_p] = C_{spq}g_q; \; [X_n, X_m] = (m - n)X_{m+n}; \; [X_n, g_s] = 0, \tag{23}$$

где g_s принадлежит множеству операторов $c^N P_a, M_{ab}, D, c^{-N}K_a$; $N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; C_{spq} - структурные постоянные; $|m|, |n| < \infty$.

Согласно определению симметрии (2), алгебра Ли (23) есть алгебра инвариантности свободных уравнений Максвелла при $p = 1$ ввиду перестановочности ее элементов с оператором Даламбера

$$[\Box, g_s] = 0, \; g_s = \{c^N P_a, M_{ab}\}; \; [\Box, g_s]\phi = 0, \; g_s = \{D, c^{-N}K_a\}; \\ [\Box, X_n] = 0. \tag{24}$$

По данной алгебре может быть восстановлена группа преобразований пространства-времени-скорости света и трансформационные свойства полевых переменных. В 5-пространстве образов

$V^5(y^0, \mathbf{y}, y^5)$, где $y^0 = c^{1-N}t$, $y^j = c^{-N}x^j$, $y^5 = c$, $j = 1,2,3$, $x^{1,2,3} = (x, y, z)$, это есть бесконечномерная группа прямого произведения конформной группы C_{15} и группы диффеоморфизмов G^{Dif}, порожденной совокупностью преобразований $y^{5'} = f(y^5)$, где f - произвольная дифференцируемая функция. В силу соотношений (24), группа $C_{15}\mathrm{X}G^{Dif}$ есть группа симметрии уравнений Максвелла в пространстве образов $V^5(y)$. Переход к исходному пространству событий - пространству прообразов $V^5(t, \mathbf{x}, c)$ - может быть осуществлен с помощью обратного отображения $t = y^0(y^5)^{N-1}$, $x^j = y^j(y^5)^N$, $c = y^5$, $j = 1,2,3$.

В качестве примера выпишем конечномерную группу преобразований пространства-времени-скорости света в исходном пространстве событий $V^5(t, \mathbf{x}, c)$:

$$
\begin{aligned}
t' &= (\gamma + a^5/c)^{N-1}\left[\alpha(t - \beta x/c)/(1-\beta^2)^{1/2} + c^{N-1}a^0\right];\\
x' &= (\gamma + a^5/c)^{N}\left[\alpha(x - \beta ct)/(1-\beta^2)^{1/2} + c^{N}a^1\right];\\
y' &= (\gamma + a^5/c)^{N}(\alpha y + c^N a^2);\\
z' &= (\gamma + a^5/c)^{N}(\alpha z + c^N a^3);\\
c' &= \gamma c + a^5,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

где $\gamma' = 1/\gamma$, $\beta' = -\beta$, $a^{b'} = -a^b$, $\gamma' = 1/\gamma$ - групповые параметры, $b = 0,1,2,3,5$. Как частный случай при $N = 0, a^5 = 0$ здесь содержатся преобразования из работ Ромейна (Romain, 1963) и автора настоящей диссертации (1968), а также публикаций Ди-Джорио (Di Jorio, 1974) и Съедина (Sjödin, 1979). Из общих свойств преобразований (25) можно отметить нелинейность; переход в преобразования из группы Вейля, являющейся подгруппой конформной группы, при $\gamma = 1$, $a^5 = 0$, $N = 0$; возможность кинематической реализации параметров α и γ, в результате которой формулы (25) при $N = 0$, $(a^0, \mathbf{a}, a^5) = 0$ могут быть записаны как

$$t' = \frac{(1 - \mathbf{V}\cdot\mathbf{U}/c^2)^{2q-1}}{(1 - V^2/c^2)^q}(t - xV/c^2);\ c' = \frac{(1 - V^2/c^2)^{p+q-1}}{(1 - \mathbf{V}\cdot\mathbf{U}/c^2)^{2(p+q-1)}}c;$$
$$x' = \frac{(1 - \mathbf{V}\cdot\mathbf{U}/c^2)^{p-1}}{(1 - V^2/c^2)^{2p-1}}(x - Vt);\quad y', z' = \frac{(1 - \mathbf{V}\cdot\mathbf{U}/c^2)^{p-1}}{(1 - V^2/c^2)^{2p-1}}y, z. \tag{26}$$

Здесь $-\infty < p, q < +\infty$; $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ - скорость некоторой выделенной системы отсчета K_0 относительно K; $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$ - скорость произвольной системы K' относительно K. Преобразования (26) образуют группу симметрии уравнений Максвелла в силу релятивистской теоремы о сложении скоростей. При $\mathbf{U} = 0$ они содержат совокупность преобразований с инвариантной скоростью света, известных из литературы, а именно: преобразования Фойгта при $p = 1,\ q = 0$ (Voigt, 1887); Айвса при $p = (m+1)/2,\ q = (-m+1)/2$ (Ives, 1937);, Палакиоса (Palacios, 1957), Гордона (Gordon, 1962) при $p = 0,\ q = 1$; Дэвана при $p = (2-n)/2,\ q = n/2$ (Dewan, 1961); Подлахи при $p = -\varepsilon,\ q = 1+\varepsilon$ (Podlaha, 1969). Кроме того, они включают и некоторую совокупность преобразований с неинвариантной скоростью света и квазиньютоновым общим временем при $p = 1/2, q = 0$ из работ автора настоящей диссертации (1968, 1973) и исследований Хсу (Hsu, 1976). В случае, когда $p = q = 1/2$ соотношения (26) переходят в преобразования Лоренца, и, следовательно, содержат их как частный случай.

В главе 3 проведено изучение симметрий уравнений электродинамики и квантовой теории при операции инверсии скорости света $Q(x^0 \to x^0, \mathbf{x} \to \mathbf{x}, c \to -c)$. Данная симметрия относятся к классу дискретных. Известными примерами дискретных симметрий в пространствах $R^3 \mathrm{X} T^1$ и M^4 является инверсия пространства P, обращение времени T, зарядовое сопряжение C. Дополнительные симметрии появляются в 5-пространстве с неинвариантной скоростью света в связи с возможностью инверсии скорости света $c \to -c$ при неизменных пространственных переменных $\mathbf{x} \to \mathbf{x}$ и "времени" $x^0 \to x^0$. Обозначим эту операцию через Q, и будем проводить симметрийный анализ в 5-пространстве $V^5(x^0, \mathbf{x}, c)$ на гиперплоскостях $c = +3 \cdot 10^{10}$ и $c = -3 \cdot 10^{10}$ см/сек.

Введем три матрицы размерности 5X5:

$$\alpha^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \alpha^P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \alpha^Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

где I - трехмерная единичная матрица; $\alpha^{T^2} = \alpha^{P^2} = \alpha^{Q^2} = E$; E - единичная пятимерная матрица; $[\alpha^T, \alpha^P] = [\alpha^T, \alpha^Q] = [\alpha^P, \alpha^Q] = 0$. Матрицы и их произведения образуют циклическую абелеву группу и порождают 8-мерную группу дискретных преобразований времени, пространства и скорости света G_8 в пространстве событий $V^5(x^0, \mathbf{x}, c)$:

$$x^{a\prime} = (\alpha^{T^k} \alpha^{P^l} \alpha^{Q^m})^{ab} x^b; \; a, b = 0, 1, 2, 3, 5. \tag{28}$$

Здесь $x^0 = ct, \; x^{1,2,3} = (x, y, z), \; x^5 = c$; $(k, l, m) = 0, 1, 2, \ldots$. Матрицам α^P, α^T, α^Q могут быть поставлены в соответствие операторы P, T и Q, воздействующие на полевые функции уравнений при замене переменных (28). Имеет место :

Теорема 1 *Группа G_8 является группой симметрии уравнения светового конуса, однородных и неоднородных уравнений Даламбера, одно и двузарядовых уравнений Максвелла, уравнений движения заряженной частицы в электромагнитном поле, уравнений Шредингера и Клейна-Гордона-Фока, уравнений Дирака для нейтральной частицы и заряженной частицы в электромагнитном поле.*

В силу Теоремы 1 преобразования (28) образуют новые дискретные симметрии в классической электродинамике и квантовой теории. Совместно с P, T и C преобразованиями они обобщают симметрии, известные в литературе. Число независимых симметрий оказывается равным 16 (совпадает с числом независимых комбинаций матриц Дирака плюс единичная матрица). Из них применительно к физике рассматривались симметрии типа E, P, T, C и их комбинации. Симметрии типа Q, QT, QP, QC и их комбинации не обсуждались. Для выяснения взаимосвязи между ними воспользуемся уравнением Дирака

$$(\gamma^a p_a - mc)\Psi(x^0, \mathbf{x}, c) = (i\hbar\partial_0 + i\hbar\gamma\cdot\nabla - mc)\Psi(x^0, \mathbf{x}, c) = 0. \quad (29)$$

Здесь $x^a = (ct, x, y, z)$; $g_{ab} = (+, -, -, -)$; $\gamma^a = (\gamma^0, \gamma); \gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ - матрицы Дирака; $p_a = i\hbar\partial/\partial_a, a = 0, 1, 2, 3$; $\Psi =$ столбец(ϕ, χ); $\phi =$ столбец(ϕ_1, ϕ_2); $\chi =$ столбец(χ_1, χ_2). Определим действие оператора инверсии скорости света Q по аналогии с действием оператора C[4]:

$$\begin{gathered} C\Psi(x^0, \mathbf{x}, c) = U_C\overline{\Psi}^{\mathrm{T}}(x^0, \mathbf{x}, c) = U_C\gamma^0\Psi^*(x^0, \mathbf{x}, c); \hbar \to \hbar; \\ Q\Psi(x^0, \mathbf{x}, c) = U_Q\overline{\Psi}^{\mathrm{T}}(x^0, \mathbf{x}, -c) = U_Q\gamma^0\Psi^*(x^0, \mathbf{x}, -c); \hbar \to -\hbar. \end{gathered} \quad (30)$$

Здесь U_C и U_Q - матрицы преобразований биспиноров $\overline{\Psi}^T(x^0, \mathbf{x}, c)$ и $\overline{\Psi}^T(x^0, \mathbf{x}, -c)$; $\overline{\Psi} = \Psi^+\gamma^0$; T - транспонирование; $*$ - комплексное сопряжение. Применяя к уравнению (29) операции зарядового сопряжения C и инверсии скорости света Q, а также пространственной инверсии P и обращения времени T, можно составить таблицу сопоставления обсуждаемых симметрий с литературными данными[5].

СОПОСТАВЛЕНИЕ СИММЕТРИЙ

Берестецкий, Лифшиц, Питаевский[4] C, P, T симметрии $c \to +c,\ \hbar \to +\hbar$:	Настоящая работа P, T, Q симметрии $c \to \pm c,\ \hbar \to \pm\hbar$:
$P\Psi = i\gamma^0\Psi(x^0, -\mathbf{x}, c)$;	$P\Psi = i\gamma^0\Psi(x^0, -\mathbf{x}, c)$;
$T\Psi = -i\gamma^1\gamma^3\Psi^*(-x^0, \mathbf{x}, c)$;	$T\Psi = -i\gamma^1\gamma^3\Psi^*(-x^0, \mathbf{x}, c)$;
$PT\Psi = \gamma^0\gamma^1\gamma^3\Psi^*(-x^0, -\mathbf{x}, c)$;	$PT\Psi = \gamma^0\gamma^1\gamma^3\Psi^*(-x^0, -\mathbf{x}, c)$;

(31)

[4] С. Швебер, Г. Бете, Ф. Гофман. Мезоны и поля. М.: ИЛ, 1957, с. 172.

[5] В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Релятивистская квантовая теория поля. Часть 1. - М.: Наука, 1968, с. 117.

СОПОСТАВЛЕНИЕ СИММЕТРИЙ

Берестецкий, Лифшиц, Питаевский[4] *C, P, T симметриц* $c \to +c,\ \hbar \to +\hbar$:	*Настоящая работа* *Q, P, T симметриц* $c \to \pm c,\ \hbar \to \pm\hbar$:
$CPT\Psi = i\gamma^5\Psi(-x^0, -\mathbf{x}, c)$;	$QPT\Psi = i\gamma^5\Psi(-x^0, -\mathbf{x}, -c)$;
$CT\Psi = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\Psi(-x^0, \mathbf{x}, c)$;	$QT\Psi = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\Psi(-x^0, \mathbf{x}, -c)$;
$CP\Psi = i\gamma^0\gamma^2\Psi^*(x^0, -\mathbf{x}, c)$;	$QP\Psi = i\gamma^0\gamma^2\Psi^*(x^0, -\mathbf{x}, -c)$;
$C\Psi = \gamma^2\Psi^*(x^0, \mathbf{x}, c)$;	$Q\Psi = \gamma^2\Psi^*(x^0, \mathbf{x}, -c)$

(32)

Видно, что зарядовое сопряжение C соответствует сопряжению Q, $[C, Q]\Psi(x^0, \mathbf{x}, c) = 0$. Аналогично, комбинации CPT, CT и CP соответствуют комбинациям QPT, QT, QP, и зарядовое сопряжение C можно интерпретировать как проявление $c \to -c$ симметрии, которая отражает фундаментальные свойства уравнений квантовой электродинамики сохранять инвариантность при изменении знака скорости света на обратный.

В главе 4 проведено изучение симметрий свободных уравнений Максвелла и Даламбера в пространстве решений. Симметрии в пространстве решений относятся к так называемым внутренним (динамическим) симметриям, не затрагивающим пространственно-временных переменных. Симметрии подобного рода содержат важную информацию об объектах исследований. В качестве примера можно указать на изоспиновую симметрию сильного взаимодействия, не различающую протонов и нейтронов, дуальную симметрию уравнений электродинамики, допускающую существование как электрических, так и магнитных зарядов. Ниже остановимся на внутренних симметриях свободных уравнений Максвелла

$$\nabla \mathrm{X} \mathbf{E} + \partial_0 \mathbf{H} = 0;\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0;\ \nabla \mathrm{X} \mathbf{H} - \partial_0 \mathbf{E} = 0;\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \qquad (33)$$

где $x^0 = ct$. С помощью преобразования Фурье для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$

$$\mathbf{E}(x^0, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \tilde{\mathbf{E}}(x^0, \mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}};$$

$$\mathbf{H}(x^0,\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \tilde{\mathbf{H}}(x^0,\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tag{34}$$

перейдем к уравнениям Максвелла в импульсном представлении

$$\mathbf{p}\mathrm{X}\tilde{\mathbf{E}} - i\partial_0\tilde{\mathbf{H}} = 0;\ \mathbf{p}\cdot\tilde{\mathbf{E}} = 0;\ \mathbf{p}\mathrm{X}\tilde{\mathbf{H}} + i\partial_0\tilde{\mathbf{E}} = 0;\ \mathbf{p}\cdot\tilde{\mathbf{H}} = 0. \tag{35}$$

Введем совокупность преобразований

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{E}}'_k &= \tilde{\mathrm{E}}_k cos\theta_{LMN} + i({D_a}^L {D_s}^M {\mathrm{D}_s}^N)_{kl}\tilde{\mathrm{E}}_l sin\theta_{LMN};\\
\tilde{\mathrm{E}}'_k &= \tilde{\mathrm{E}}_k ch\psi_{LMN} + i({D_a}^L {D_s}^M {\mathrm{D}_s}^N)_{kl}\tilde{\mathrm{H}}_l sh\psi_{LMN};\\
\tilde{\mathrm{H}}'_k &= \tilde{\mathrm{H}}_k cos\theta_{LMN} + i({D_a}^L {D_s}^M {(-\mathrm{D})_s}^N)_{kl}\tilde{\mathrm{H}}_l sin\theta_{LMN};\\
\tilde{\mathrm{H}}'_k &= \tilde{\mathrm{H}}_k ch\psi_{LMN} - i({D_a}^L {D_s}^M {(-\mathrm{D})_s}^N)_{kl}\tilde{\mathrm{E}}_l sh\psi_{LMN}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Здесь θ_{LMN}, ψ_{LMN} - групповые параметры; $k,l = 1,2,3$; $L,M,N = 0,1,3,\ldots,n$; a,s - индексы антисимметрии и симметрии. Подставим преобразования (36) в уравнения (35) для штрихованных полей и потребуем, чтобы преобразованные уравнения перешли в себя. Соответствующие условия инвариантности позволяют найти общий вид матриц D_a, D_s, D_s. Матрицы зависят от переменных p_k и некоторых функций этих переменных. Две из них D_a и D_s и U(2)XU(2) симметрия уравнений ранее были найдены Фущичем и Никитиным (1978). Матрица D_s была установлена благодаря излагаемому подходу автором настоящей работы в 1979 г. Ее существование расширяет границы симметрии, поскольку вследствие свойств коммутации и антикоммутации

$$[D_a, D_s] = 0;\ [D_s, \mathrm{D}_s] = 0;\ \{D_a, \mathrm{D}_s\} = 0, \tag{37}$$

множество матриц D_a, D_s, D_s и их произведений порождают бесконечную совокупность преобразований симметрии (36) уравнений (35).

Выделим подмножество матриц, удовлетворяющих условию нормировки на решениях - образах Фурье $\tilde{\phi}(x^0,\mathbf{p})$:

$$D_a D_a \tilde{\phi} = \mathrm{E}\tilde{\phi};\ D_s D_s \tilde{\phi} = \mathrm{E}\tilde{\phi};\ \mathrm{D}_s \mathrm{D}_s \tilde{\phi} = \mathrm{E}\tilde{\phi}. \tag{38}$$

Нормировка позволяет конкретизировать вид матриц и на основе таблицы умножения

$$D_a D_a = D_s;\ D_s D_s = D_s;\ \mathrm{D}_s \mathrm{D}_s = D_s;$$
$$D_a D_s = D_a;\ D_a \mathrm{D}_s = \mathrm{D}_s;\ D_s \mathrm{D}_s = \mathrm{D}_s \tag{39}$$

установить 16 инфинитезимальных матриц Y_{LMN}, Z_{LMN} размерности 6X6 $(L, M, N = 0, 1)$, через которые выражаются все остальные инфинитезимальные матрицы преобразований (36). Множество матриц $Y,\ Z$ удовлетворяет перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned}
&[Y_{LMN}, Y_{L'M'N'}]_{-,+} = \\
&-i[(-1)^{NL'} \pm (-1)^{N'L}]Y_{L+L'M+M'N+N'}; \\
&[Y_{LMN}, Z_{L'M'N'}]_{-,+} = \\
&-i[(-1)^{NL'} \pm (-1)^{N'L+N}]Z_{L+L'M+M'N+N'}; \\
&[Z_{LMN}, Z_{L'M'N'}]_{-,+} = \\
&i[(-1)^{NL'+N'} \pm (-1)^{N'L+N}]Y_{L+L'M+M'N+N'}
\end{aligned} \tag{40}$$

и, следовательно, удовлетворяют и алгебре Ли, и алгебре Грассмана, и допускают объединение в единую алгебру $A^{Lie} + A^{Gras}$ и супералгебру $[Y, Y] = Y,\ [Y, Z] = Z,\ \{Z, Z\} = Y$. При $L, M, N = 0, 1$ здесь содержатся соответствующие 16 - мерные подалгебры операторов $Y_{000},\ Y_{100}, \ldots,\ Y_{111};\ Z_{000},\ Z_{100}, \ldots,\ Z_{111}$. Из них 16 - мерная подалгебра Ли изоморфна алгебре Ли группы U(2)XU(2)XU(2)XU(2) и содержит 8 - мерную подалгебру группы U(2)XU(2) Фущича и Никитина (1978), U(1)XU(1) - изоморфную двумерную подалгебру преобразований $\mathbf{E}' = e^{i\theta}\mathbf{E},\ \mathbf{H}' = e^{i\theta}\mathbf{H};\ \mathbf{E}' = \mathbf{E}ch\psi + i\mathbf{H}sh\psi,\ \mathbf{H}' = \mathbf{H}ch\psi - i\mathbf{E}sh\psi,\ \ \psi = -i\alpha$ Данилова (1967) и Ибрагимова (1968). Последние соотношения совпадают с одномерными преобразованиями Райнича[6] (1925) и Лармора[6] (1928), которые при $\alpha = \pi/2$ содержат дискретные преобразования $\mathbf{E} \to \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \to -\mathbf{E}$ Хевисайда[6] (1893). Все остальные преобразования в "x" - пространстве являются нелокальными (интегральными).

[6]Цитируется по монографии: В.И Фущич, А.Г. Никитин. Симметрия уравнений Максвелла. Киев, Наукова Думка, 1983, с. 5,6.

Глава 5 посвящена изложению новой версии релятивистски инвариантных нелинейных уравнений Максвелла. Нелинейные уравнения теоретической и математической физики привлекают значительное внимание вследствие присущих им специфических свойств таких, как отсутствие принципа суперпозиции, нелинейного взаимодействия полей, существования солитонных решений. На возможность существования нелинейной электродинамики впервые указал Ми[7], исходя из теории инвариантов электромагнитного поля (1912). Конкретные версии релятивистских уравнений были предложены Борном (1934), Борном и Инфельдом (1934) исходя из вариационного принципа. Позднее Фущич и Цифра (1985) применили для этой цели классический алгоритм Ли. В настоящей работе формулировка Лоренц и Пуанкаре-инвариантных нелинейных уравнений Максвелла осуществлена с помощью метода замены переменных с учетом полевых инвариантов, сопутствующих преобразованиям Лоренца и Пуанкаре.

Введем одномерные преобразования Лоренца

$$x_1{}' = \frac{x_1 - \beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}};\; x_2{}' = x_2;\; x_3{}' = x_3;\; t' = \frac{t - \beta x_1/c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{41}$$

где $x_{1,2,3} = x, y, z$; c - скорость света; t - время; $\beta = V/c$; V - скорость перемещения инерциальной системы отсчета K' относительно K.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что совокупность нелинейных уравнений

$$\begin{gathered}\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi F_1(I_1, I_2)\rho;\; \nabla \mathrm{X} \mathbf{H} - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{E} = +4\pi F_1(I_1, I_2)\rho\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c}};\\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 4\pi F_2(I_1, I_2)\mu;\; \nabla \mathrm{X} \mathbf{E} + \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{H} = -4\pi F_2(I_1, I_2)\mu\frac{\mathbf{w}}{\mathbf{c}}\end{gathered} \tag{42}$$

инвариантна относительно преобразований (41), если входящие в

[7]Цитируется по монографии: В. Паули. Теория относительности. - М.-Л.: Гостехиздат. 1947, с. 272-278.

них величины трансформировать известным образом:

$$
\begin{aligned}
&{E_1}' = E_1; && {E_2}' = \frac{E_2 - \beta H_3}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad {E_3}' = \frac{E_3 + \beta H_2}{\sqrt{1-\beta^2}};\\
&{H_1}' = H_1; && {H_2}' = \frac{H_2 + \beta E_3}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad {H_3}' = \frac{H_3 - \beta E_2}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad (43)\\
&\rho' = \rho\frac{1 - v_1 V/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}; && \mu' = \mu\frac{1 - w_1 V/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{v_1}' &= \frac{v_1 - V}{1 - v_1 V/c^2}; \quad {v_{2,3}}' = v_{2,3}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - v_1 V/c^2};\\
{w_1}' &= \frac{w_1 - V}{1 - w_1 V/c^2}; \quad {w_{2,3}}' = w_{2,3}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - w_1 V/c^2}.
\end{aligned} \qquad (44)
$$

Здесь $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ - электрическое и магнитное поле; ρ, μ - плотности электромагнитных зарядов; $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ - скорости зарядов; F_1 и F_2 - две произвольные функции Лоренц и Пуанкаре-инвариантов поля $I_1 = 2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)$; $I_2 = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})^2$.

Доказательство допускает естественное обобщение на случай преобразований пространственно-временных переменных из группы Пуанкаре P_{10}.

В силу произвольности функций F_1 и F_2 система (42) содержит бесконечное множество конкретных реализаций, среди которых можно выделить базовые линейные версии:
- $\rho = \mu = 0$ - свободные уравнения Максвелла;
- $F_1 = F_2 = 1$, $\mu = 0$ - неоднородные уравнения Максвелла;
- $F_1 = F_2 = 1$ - гипотетические, двузарядовые уравнения.

Нелинейность в общем случае обусловлена наличием токов и зарядов.

По аналогии с электромагнитными зарядами $q = \int \rho d^3x$ и $p = \int \mu d^3x$, условимся называть плотности электромагнитных зарядов и токов ρ, μ, $\rho\mathbf{v}/c$ и $\mu\mathbf{w}/c$ исходными, а величины $F_1\rho$, $F_2\mu$, $F_1\rho\mathbf{v}/c$, $F_2\mu\mathbf{w}/c$ - эффективными. Это означает, что введенные нелинейные микроскопические уравнения электродинамики (42) суть уравнения, которые вместо исходных содержат эффективные значения плотности токов и зарядов. Уравнения реализуют принцип самодействия: исходные заряды генерируют электромагнитные поля, которые в свою очередь воздействуют на них до достижения состояния равновесия с генерирующими полями. Тем самым в нелинейных уравнениях (42) электромагнитные заряды

$$Q = \int F_1(I_1, I_2)\rho d^3x;\ P = \int F_2(I_1, I_2)\mu d^3x \tag{45}$$

обретают, по крайней мере частично, полевую природу - свойство, отсутствующее в электродинамике линейной, и нелинейной электродинамике Борна-Инфельда. При этом заряды Q и P сохраняют свойство лоренц-инвариантности вследствие инвариантности функций F_1 и F_2 (доказательство аналогично известному из литературы), и являются интегралами движения в силу уравнений непрерывности

$$\partial_t(F_1\rho) + c\nabla\cdot(F_1\mathbf{J}) = 0;\ \partial_t(F_2\mu) + c\nabla\cdot(F_2\mathbf{K}) = 0. \tag{46}$$

Из этих же уравнений следует, что исходные (затравочные) заряды q и p не сохраняются во времени. Например, интегрируя первое из уравнений (46), для электрического заряда q имеем:

$$\begin{aligned}\partial_t q = -\oint \rho\mathbf{v}ds - \int \rho[(\partial_t F_1 + \mathbf{v}\cdot\nabla F_1)/F_1]d^3x = \\ -\oint \rho\mathbf{v}ds - \int \rho(dF_1/dt)/F_1 d^3x.\end{aligned} \tag{47}$$

Здесь ds, как обычно, является элементом площади, окружающей элемент объема d^3x. Согласно (47), изменение заряда q вызывается не только истечением тока $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ (как в линейной электродинамике при $F_1 = 1$), но также и изменением во времени и пространстве полевого инварианта $F_1(I_1, I_2)$. В частном случае постоянного поля заряд q остается интегралом движения. При выборе функции F_1 в виде $F_1 = 1$ нелинейные эффекты исчезают, и сформулированные уравнения автоматически превращаются в уравнения двузарядовой электродинамики, или в классические уравнения Максвелла при $\mu = 0$.

В главе 6 прослежена взаимосвязь новых симметрий с физикой на уровне новых уравнений и их решений, а также интерпретации решений.

6.1 **Специальная теория относительности с неинвариантной скоростью света.** Остановимся на выяснении взаимосвязи специальной теории относительности (СТО) с пространственно - временными преобразованиями с нарушенной инвариантностью скорости света из Главы 2.

Ввиду математического изящества, лаконичности и предсказательной силы СТО является фундаментальной теорией современной физики. Вследствие этого ее математические постулаты и возможность их обобщения и экспериментальной проверки постоянно привлекают внимание научной общественности. Это замечание в полной мере относится к постулату постоянства скорости света. Abraham[8] (1908), Ritz[8] (1908), Comstock[8] (1910), Kunz[8] (1910), Tolman[8] (1910), Rapier (1962), Romain (1963), автор настоящей работы (1968), Loiseau (1968), Di Jorio (1974), Marinov (1975), Hsu (1976), Sjödin (1976), Логунов[9] (1982) - вот, возможно, далеко не все авторы, исследовавшие данную проблему с теоретической точки зрения. Диссертация содержит аналогичный раздел, где проведено обобщение СТО путем нарушения постулата инвариантности скорости света в 4-интервале, где величина скорости света c' постоянна, но не совпадает с величиной c:

$$c'^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - inv;\ c' \neq c. \tag{48}$$

В соответствии с Главой 2, для обеспечения инвариантности данной формы введены пространственно-временные преобразования, удовлетворяющие условию $c't' = ct$ - inv для собственных отрезков

[8]Цитируется по монографии: В. Паули. Теория относительности. - М.-Л.: Гостехиздат, 1947, с. 16-17, 29.

[9]А.А. Логунов. Основы теории относительности. (Конспект лекций). - М.: Изд. Моск. Унив., 1982, с. 25-40.

времени t' и t:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}};\ y' = y;\ z' = z;\ t' = \gamma^{-1}\frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}};\qquad c' = \gamma c, \tag{49}$$

и их модификация при кинематической реализации группового параметра γ:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}};\ y' = y;\ z' = z;\ t' = \frac{t - xV/c^2}{1 - \mathbf{V}\cdot\mathbf{U}/c^2};\qquad c' = c\frac{1 - \mathbf{V}\cdot\mathbf{U}/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{50}$$

Здесь $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$ и $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ - скорости перемещения произвольной системы отсчета K' и некоторой выделенной системы отсчета K_o относительно лабораторной системы отсчета K.

Сформулирована теорема сложения скоростей. Построено выражение инвариантного интеграла действия

$$S^* = cS = -mc^2\int ds + e\int A_a dx_a + \frac{i}{16\pi}\int {F_{ab}}^2 d^4x. \tag{51}$$

Здесь S^* - новый интеграл действия, который назовем обобщенным; S - интеграл действия в СТО; mc^2 - инвариантная комбинация, соответствующая энергии покоя частицы (m - масса частицы); e - инвариантный заряд частицы; $A_a = (\mathbf{A}, i\phi)$ - 4-потенциал; $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ - тензор электромагнитного поля; $d^4x = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ - инвариантный элемент 4-объема. Введены обобщенные импульс $\mathbf{p}^* = c\mathbf{p}$ и энергия частицы $E^* = E = mc^2/\sqrt{1-\beta^2}$. Им соответствуют уравнения движения электромагнитного поля в виде уравнений Максвелла и уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле

$$\frac{d\mathbf{p}^*}{dt} = \frac{d(c\mathbf{p})}{dt} = ce\mathbf{E} + e\mathbf{v}\mathrm{x}\mathbf{H};\qquad \frac{dE^*}{dt} = \frac{dE}{dt} = e\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}, \tag{52}$$

где **E** и **H** - электрическое и магнитное поле. В силу независимости скорости света от координат и времени, полученные уравнения и их решения, несмотря на формальное нарушение постулата инвариантности скорости света, совпадают с известными уравнениями СТО. За импульсом **p** сохраняется смысл интеграла движения.

Рассмотрены трансформационные свойства кинематических, динамических и полевых переменных. Показано, что нарушение инвариантности скорости света здесь носит формально-математический характер, вследствие чего данная теоретическая модель объясняет ту же совокупность экспериментальных фактов, что и СТО. Выделенная система отсчета K_o оказалась физически ненаблюдаемой. Полученные результаты допускают своеобразное расширение принципа относительности: законы природы не должны зависеть не только от состояния равномерного и прямолинейного движения, но также и от конкретного значения скорости света.

6.2. Локальная специальная теория относительности. Рассмотрена возможность наделения условия $c' \neq c$ непосредственным физическим смыслом. С этой целью нарушение инвариантности скорости света проведено на инфинитезимальном уровне в выражении для квадрата дифференциала 4-интервала:

$$\begin{aligned} ds^2 = -(dx_1{}')^2 - (dx_2{}')^2 - (dx_3{}')^2 - (dx_4{}')^2 = \\ -(dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2 - (dx_4)^2 - inv, \end{aligned} \tag{53}$$

где $c' \neq c$, $dx_{1,2,3} = (dx, dy, dz)$, $dx_4 = icdt$. Соответствующие инфинитезимальные пространственно-временные преобразования координат, сохраняющие инвариантной данную квадратичную форму, образуют группу, локально изоморфную группе Пуанкаре P_{10} с локально значимыми групповыми параметрами в матрице Лоренца L_{ab}: $dx_a{}' = dx_a$; $dx_a{}' = L_{ab}dx_b$; $a, b = 1, 2, 3, 4$. В отличие от глобальных преобразований из предыдущей модели, здесь скорость света "c" может явно или неявно зависеть от пространственно-временной точки $(\mathbf{x}, t)$. В этом состоит принципиальное отличие локальных преобразований Лоренца от преобразований Лоренца глобальных, что и приводит к качественно новым результатам. В предлагаемой модели, в отличие от моделей ОТО, зависимость скорости света от координат неявная. Пополняя локальные преобразования дополнительным физическим элементом - инвариантностью значения скорости света относительно излучателя $c_0{}' = c_0 = c_o = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек и синхронизацией хода разноместных часов в произвольных системах отсчета K$'$ и K посредством переноса эталонного хронометра $dt' = dt = dt_o$, связанного с излучателем K$_o$, была построена модель, которую условимся называть локальной специальной теорией относительности (ЛСТО). В ее основе лежат пространственно-временные преобразования

$$dx = \frac{dx_o - v_o dt_o}{\sqrt{1 - {v_o}^2/{c_o}^2}};\ dy = dy_o;\ dz = dz_o;\ dt = dt_o - \frac{v_o dx_o}{{c_o}^2};$$
$$c = \frac{c_o}{\sqrt{1 - {v_o}^2/{c_o}^2}} = c_o\sqrt{1 + v^2/{c_o}^2}. \tag{54}$$

Здесь v - скорость системы K$_o$, связанной с движущимся телом, относительно наблюдателя K; v_o - скорость наблюдателя K относительно системы K$_o$, имеющей смысл выделенной системы отсчета в предыдущей модели. В общем случае скорость v, равно как и скорость света c, может зависеть от пространственно-временной точки $(\mathbf{x}, t)$. Величина скорости v не превосходит величины c $(v \leq c)$, которая в системе наблюдателя обладает непрерывным спектром значений в интервале от $c_o = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек до бесконечности (ограничена снизу величиной c_o). В результате модель допускает существование сверхсветовых объектов с действительной массой.

Сохраняя в ЛСТО интеграл действия (51), формально были получены те же самые уравнения движения, что и в разделе 6.1. Однако смысл их становится несколько иным ввиду зависимости скорости света "c" от скорости движения источника излучения v, которая в данном случае может оказаться не постоянной. Поэтому интегралы движения - обобщенный импульс и энергия - после подстановки в них явного выражения для скорости света здесь принимают вид $\mathbf{p}^* = c\mathbf{p} = m_o c_o \mathbf{v}$, $E = mc^2 = m_o c_o c$, где m_o - значение массы частицы в сопутствующей системе отсчета. Вместо импульса в СТО интегралом движения в ЛСТО становится произведение скорости света на импульс. Смысл энергии как интеграла движения остается неизменным. Взаимосвязь между энергией и обобщенным импульсом сохраняется прежней: $E^2 - c^2\mathbf{p}^2 = {m_o}^2{c_o}^4$. Однако уравнения движения заряженной частицы видоизменяются и выглядят как

$$\begin{gathered}\frac{d(c\mathbf{p})}{dt} = ce\mathbf{E} + e\mathbf{v}\text{x}\mathbf{H} \rightarrow m_o\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{c}{c_o}e\mathbf{E} + \frac{e}{c_o}\mathbf{v}\text{x}\mathbf{H}; \\ \frac{dE}{dt} = e\mathbf{v}\cdot\mathbf{E} \rightarrow m_o\frac{dc}{dt} = \frac{e}{c_o}\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}.\end{gathered} \tag{55}$$

В диссертации уравнения проинтегрированы для случая движения частицы в постоянном, однородном электрическом и магнитном поле. Рассмотрены особенности распада нестабильных и рождения новых частиц и взаимосвязь ЛСТО с экспериментом. В итоге оказалось, что предсказания модели в ряде случаев совпадают или близки, в ряде случаев расходятся с предсказаниями СТО и доступны экспериментальной проверке. Сюда относятся, например, измерения аберрационных углов небесных светил с большими величинами красного смещения, измерения красных смещений в радио-частотном диапазоне спектра и сравнение их с величинами смещений для длин волн, обнаружение сверхсветовых движений в астрофизике и время-пролетных экспериментах.

6.3. Единое время Ньютона в классической электродинамике. Как известно, трудности экспериментального характера в галилеевском подходе начинаются с определения величины скорости света. Если в рамках преобразований Галилея допустить, что скорость света равна $3 \cdot 10^{10}$ см/сек относительно излучателя (гипотеза Ритца), то согласно галилеевской теореме о сложении скоростей скорость света должна зависеть от скорости движения источника света. Спектр значений скорости света в системе наблюдателя должен быть непрерывным в диапазоне от нуля до бесконечности. Однако в специально поставленных экспериментах таких эффектов обнаружено не было (например, Бонч-Бруевич и Молчанов, 1956; Alvager, Nilsson, Kjellman, 1963; Sadeh, 1963; Filippes and Fox, 1965). Отмеченную трудность можно преодолеть, если модифицировать преобразования Галилея таким образом, что бы они оказались совместными как с концепцией единого времени Ньютона $t' = t$, так и с постулатом инвариантности скорости света $c' = c$. Так расширенные преобразования Галилея имеют вид:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - 2\beta n_x + \beta^2}};\ y' = \frac{y}{\sqrt{1 - 2\beta n_x + \beta^2}};\ z' = \frac{z}{\sqrt{1 - 2\beta n_x + \beta^2}};$$
$$t' = t;\ c' = c, \tag{56}$$

где $\beta = V/c$, $n_x = c_x/c$, параметр $\lambda = \sqrt{1 - 2\beta n_x + \beta^2}$ имеет смысл группового параметра $\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}$ в СТО. Показано, что уравнения Максвелла инвариантны относительно данных преобразований, которые являются преобразованием нелиевой симметрии типа $p = 2$. Рассмотрены элементы физической интерпретации данной симметрии. Оказалось, что галилеевский подход позволяет последовательно объяснить результаты опытов Майкельсона, Физо, аберрацию света, продольный и поперечный эффекты Доплера (совпадение с релятивистским результатом с точностью до β^2 для продольного, и β^4 для поперечного эффекта), опыты по доказательству независимости скорости света от скорости движения источника света. Вместе с тем галилеевская симметрия приводит к ряду принципиально иных следствий, нежели симметрия релятивистская. В качестве примера отметим только два из них: отсутствие эффекта замедления времени, и отсутствие ограничений на скорость распространения взаимодействий, отличных от электромагнитного, где $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек. В результате в галилеевском подходе замедление времени жизни быстрых нестабильных частиц, например атмосферных μ-мезонов, можно объяснить как эффект кажущийся и на самом деле обусловленный сверхсветовым движением мезонов со скоростью $v \approx 3 \cdot 10^{12}$ см/сек. Равным образом сверхсветовое расширение некоторых космических радиоисточников, например квазара NRAO 140 (z=1,258) может рассматриваться как эффект реальный в отличие от интерпретации эффекта как кажущегося в специальной теории относительности. В рамках расширенной галилеевой симметрии элементарные частицы не обязательно должны быть точечными ввиду отсутствия ограничений на скорость распространения всех взаимодействий (за исключением электромагнитного). В итоге можно заключить, что единое время Ньютона $t' = t$ совместимо с электродинамикой Максвелла; принцип относительности Галилея может быть реализован не только в классической механике, но также и в классической электродинамике.

6.4. Природа зарядового сопряжения и модель электронно-фотонного вакуума Дирака. Как известно, в квантовой физике зарядовое сопряжение C является независимым преобразованием, природа которого неизвестна. Однако положение меняется, если в теорию привнести дискретное преобразование $c \to -c$, $t \to t,\ \ \mathbf{x} \to \mathbf{x}$. В этом случае группа Лоренца образует прямое произведение с группой инверсии скорости света (инверсия скорости света не влияет на вид пространственно-временных преобразований Лоренца)

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}};\ y' = y;\ z' = z;\ t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}};\ c' = -c, \quad (57)$$

вследствие чего основанные на данных преобразованиях теоретические модели сохраняют свойство релятивистской инвариантности, не выходя радикально за пределы современных теоретических представлений. В то же время оператор зарядового сопряжения C и оператор преобразования полевых функций, порожденный инверсией $c \to -c$, оказываются связанными между собой ($C\Psi(x^0, \mathbf{x}, c) = Q\Psi(x^0, \mathbf{x}, c)$, если $\hbar(c \to -c) \to -\hbar$). Последнее свойство позволяют интерпретировать зарядовое сопряжение и индуцированную сопряжением C симметрию частица-античастица как проявление $c \to -c$ симметрии подобно тому, как пространственная инверсия $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$ отражает симметрию между правым и левым, а обратимость времени $t \to -$t на уровне фундаментальных уравнений физики отражает равнозначность прошлого и будущего. Кроме того, существование $c \to -c$ симметрии обогащает концепцию вакуума Дирака, позволяя заселить его не только электронами (фермионами), но и фотонами (бозонами), что представляется более естественным, поскольку устраняет исключительность электронов. Математическим основанием такой возможности является допустимость записи свободных уравнений Максвелла (Фущич и Никитин, 1983) в виде безмассового уравнения Дирака $\gamma^a p_a \Psi(x^0, \mathbf{x}, c) = 0$ ($a = 0, 1, 2, 3; \gamma^a$ - четыре 8-мерные матрицы) для 8-компонентной функции Ψ=столбец$(0, \mathbf{E}, 0, \mathbf{H})$ с последующим использованием операции зарядового сопряжения и генерацией зарядово-сопряженной волновой функции $\Psi_C = C\Psi = U_C \overline{\Psi}^{\mathrm{T}} = U_C \gamma^0 \Psi^*$ нейтрального антифотона с отрицательной энергией. Наконец, эта симметрия побуждает предположить, что физический мир как целое является 5-мерным. Он состоит из двух гиперплоскостей: $c = +3 \cdot 10^{10}$ и $c = -3 \cdot 10^{10}$ см/сек. На каждой из гиперплоскостей реализуется пространство Минковского, и каждая гиперплоскость заполнена фотонами и электронами. Их поведение описывается одними и теми же уравнениями классической и квантовой электродинамики. Свободный фотон с положительной энергией на гиперплоскости "-c" идентичен вакуумному фотону с отрицательной энергией на гиперплоскости "$+c$". Свободный электрон с положительной энергией на гиперплоскости "-c" идентичен вакуумному электрону с отрицательной энергией на гиперплоскости "$+c$". Или, другими словами, "-c" гиперплоскость проявляет себя как вакуум Дирака. В результате реакцию $\gamma + \gamma \to e^- + e^+$ можно рассматривать как акт аннигиляции нейтрального фотона и нейтральной фотонной дырки подобно тому, как реакция $e^- + e^+ \to \gamma + \gamma$ интерпретируется как аннигиляция электрона и позитрона. В случае электронного вакуума вакуумные переходы $e^- \to e^{-\prime} + \gamma + \gamma$ запрещены принципом Паули. В случае вакуума фотонного вакуумные переходы $\gamma \to \gamma' + e^- + e^+$ невозможны в силу закона сохранения энергии-импульса. В то же время спонтанные переходы фотона из состояния с положительной энергией в состояние с отрицательной энергией возможны как акты аннигиляции типа $\gamma + \gamma \to \textit{электрон} + \textit{позитрон},\ \textit{нейтрино} + \textit{антинейтрино}$ ввиду отсутствия энергетической щели вследствие безмассовости фотона. Продукты аннигиляции могут генерировать в свою очередь новые фотоны и гамма кванты. В результате будет происходить непрерывный процесс энергетического обмена между гиперплоскостями

"$+c$" и "$-c$", и электронно-фотонный вакуум Дирака приобретает динамический характер. Присутствие бозонов в вакууме Дирака способствует извлечению запасенной фермионами энергии и рождению новых частиц.

6.5. Модель нелинейной электростатики с распределенной плотностью электрического заряда. Поскольку нелинейные уравнения Максвелла удовлетворяют требованию релятивистской инвариантности, они представляют потенциальный интерес для физики. В этой связи в диссертации была рассмотрена модель нелинейной электростатики, описываемой сферически симметричным нелинейным уравнением Лапласа-Пуассона

$$\left[1+\alpha\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2\right]\left[\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2\phi)}{dr}\right]=-4\pi\rho(r) \tag{58}$$

Здесь $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ - модуль радиус-вектора, $\rho(r)$ - плотность электрического заряда q, α - скалярный параметр теории, ϕ - электростатический потенциал. Показано, что в случае заряда с гауссовским распределением плотности $\rho=(q/2\pi r^2)(1/\sigma\sqrt{2\pi})e^{-r^2/2\sigma^2}$ и параметром $\alpha=\sigma^4/q^2$ выражения для электрического поля и потенциала на малых и больших расстояниях имеют вид

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(r\to 0)\approx q\left[\frac{6}{5\sqrt{2\pi}}\right]^{1/3}\frac{1}{\sigma^{5/3}r^{1/3}};\ \mathrm{E}(r\to\infty)\approx\frac{2q}{3}\frac{1}{r^2};\\
&\phi(r\to 0)\approx -\frac{3q}{2}\left[\frac{6}{5\sqrt{2\pi}}\right]^{1/3}\frac{r^{2/3}}{\sigma^{5/3}};\ \phi(r\to\infty)\approx\frac{2q}{3}\frac{1}{r}.
\end{aligned} \tag{59}$$

Отсюда следует, в рассмотренной модели на малых расстояниях происходит нарушение закона Кулона; смену знака потенциала можно интерпретировать как указание на возможное устойчивое состояние заряда; при устремлении расстояния к бесконечности поле определяется эффективным зарядом $2q/3$; величина "собственной" электростатической энергии поля заряда конечна и равна $U=\frac{1}{8\pi}\int E^2d^3x\approx 2q^2/\sigma$ при интегрировании по области 3σ. Полагая $2q^2/\sigma=m_0c^2$ находим, что параметр дисперсии гауссовского распределения σ в случае электрона с зарядом $q=e$

и массой покоя m_0 имеет смысл удвоенного классического радиуса электрона $\sigma = 2r_0 = 2q^2/m_0c^2 \approx 5,6 \cdot 10^{-13}$ см. В итоге электростатические нелинейные эффекты, связанные с нарушением закона Кулона, проявляются на расстояниях, сравнимых с дисперсией гауссовского распределения. Это область полей порядка $\mathrm{E} = q/{r_0}^2 = 6,1 \cdot 10^{15}$СГСЕ $= 2 \cdot 10^{18}$ В/см. На макроскопическом уровне нелинейность проявляется через существование дробных зарядов как следствие частичной полевой природы заряда. Проведено сравнение полученных результатов с результатами модели Борна-Инфельда и кулоновской поправкой в квантовой электродинамике.

Глава 7. Заключение. В результате проведенных исследований можно заключить, что понятие симметрии ДУЧП зависит от определения симметрии, выбранного алгоритма, размерности пространства, типа операторов симметрии и соответствующих им алгебр. Разделение уравнений на релятивистски-инвариантные и галилей-инвариантные имеет смысл только при понимании симметрии в смысле Ли, когда $p = 1$. В более общем случае, когда $p \geq 1$, уравнения проявляют дополнительные симметрийные свойства, согласующиеся и с принципом относительности в релятивистской, и в галилеевской, и в возможно иной версии, закодированной в порядке коммутационного соотношения $[L[L[L \ldots [L, Q^{(p)}] \ldots]]]_{(p-\text{раз})}\phi(x) = 0$. При этом обращает на себя внимание, что одни и те же уравнения, уравнения Максвелла, допускают существование моделей различного типа. Между ними просматривается определенная аналогия, которая позволяет считать их родственными основополагающей модели - специальной теории относительности СТО. Эта аналогия проявляется в трех аспектах принципиального характера: все модели восходят к уравнениям Максвелла; все модели (за исключением Галилей-инвариантной) обладают теоретико-групповыми свойствами, так или иначе связанными с неоднородной группой Лоренца (группой Пуанкаре). Во всех моделях в той или иной мере скорость света наделяется особыми свойствами:

- СТО - симметрия относительно группы Пуанкаре P_{10}; скорость света инвариантна в глобальном смысле $c' = c$ - inv.

- СТО с неинвариантной скоростью света - симметрия относительно группы прямого произведения $P_{10}\mathrm{XS}_1$, где S_1 - группа масштабных преобразований $t' = \gamma^{-1}t,\ c' = \gamma c$; глобально инвариантно экспериментальное значение скорости света, которую пометим нижним индексом $c'_{\text{эксп}} = c_{\text{эксп}}$ - inv.

- ЛСТО - локальная СТО - симметрия относительно группы преобразований, локально изоморфной группе Пуанкаре P_{10}; инвариантно локальное, собственное значение скорости света ${c_o}' = c_o$ - inv.

- СТО в 5-пространстве $V^5(t, \mathbf{x}, c)$ на гиперплоскостях $c = +3 \cdot 10^{10}$ и $c = -3 \cdot 10^{10}$ см/сек - симметрия относительно группы прямого произведения P_{10}XR, где R - группа инверсии скорости света $c \to c' = -c$; глобально инвариантно абсолютное значение скорости света $|\mathrm{c}'| = |c|$ - inv.

- Нелинейная модель электростатики, относящаяся к разделу нелинейной электродинамики с глобально-инвариантной скоростью света $c' = c$ - inv; симметрия относительно группы Пуанкаре P_{10}.

Несколько обособлена модель с глобально инвариантной скоростью света $c' = c$, обладающей симметрией относительно 11-мерной расширенной группы Галилея G_{11}, включающей одномерную группу масштабных преобразований $x' = x/\lambda,\ \ y' = y/\lambda,\ \ z' = z/\lambda$, $\lambda = \sqrt{1 - 2\beta n_x + \beta^2}$. Но и здесь электромагнитные поля преобразуются по проективному представлению группы Лоренца.

Если абстрагироваться от эксперимента, то все перечисленные модели с формально-математической точки зрения следует считать равнозначными. Из них наибольшей преемственностью по сравнению с СТО обладают три модели. Это СТО с нарушенной инвариантностью скорости света, описывающая ту же самую совокупность явлений, что и СТО, и добавляющая к ней возможность дополнительной классификации полей по представлениям алгебры

Вирасоро; СТО в 5-пространстве на гиперплоскостях $\pm c$, позволяющая интерпретировать зарядовое сопряжение в квантовой теории как следствие преобразования инверсии скорости света $c \to -c$, и допускающая электронно-фотонную модель вакуума Дирака; нелинейная модель электродинамики, отличная от стандартной теории на расстояниях порядка классического радиуса электрона, и привносящая в теорию принцип самодействия и его реализацию в виде дробных эффективных электрических зарядов.

Локальная СТО и Галилей-инвариантная модель с инвариантной скоростью света довольно радикально отличаются от СТО своими предсказаниями экспериментального плана, например, в вопросе о существовании сверхсветовых объектов с действительной массой. В СТО таких объектов быть не может. В ЛСТО и Галилей-инвариантной модели их существование не запрещено, и доступно экспериментальной проверке. Можно ли дискриминировать последние две модели вне эксперимента, на основе дополнительных теоретических принципов, пока не ясно. Пока можно только констатировать, что изучение симметрийных свойств уравнений Максвелла расширяет наше представление о возможном устройстве окружающего мира.

Список основных публикаций диссертации приводится ниже.

Список литературы

[1] Котельников Г.А. Об инвариантности скорости света в специальной теории относительности. Препринт ИАЭ-1665, М., 1968, 8 с.; Вест. МГУ, сер. Физика-Астрономия, 1970, N 4, с. 371-373.

[2] Котельников Г.А. О дополнительных симметриях уравнений Максвелла. Препринт ИАЭ-2507, М., 1974, 20 с.; Доклад на IV Советской гравитационной конференции "Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации", БГУ, Минск, 1-3 июля 1976.

[3] Котельников Г.А. О симметрии уравнений Максвелла с неинвариантной скоростью света. Препринт ИАЭ-2813, М., 1977, 14 с.

[4] Котельников Г.А. Групповые свойства волнового уравнения с неинвариантной скоростью света. - ТМФ, 1980, т. 42, N 1, с. 139-144; Theor. Math. Phys., 1980, v. 42, N 1, p. 91-95.

[5] Котельников Г.А. Уравнения электродинамики с неинвариантной скоростью света. - Изв. ВУЗов, Физика, 1981, N 10, с. 46-51; - Sov. Phys. J., 1981, v. 24, N 10, p. 938-943.

[6] Kotel'nikov G.A. On the Symmetry of Equations of the Free Electromagnetic Field. - Nuovo Cim., 1982, 72 B, N 1, p. 68-78.

[7] Котельников Г.А. Галилеева симметрия уравнений Максвелла в классической электродинамике. - Изв. ВУЗов, Физика, 1985, N 8, с. 78-83.

[8] Kotel'nikov G.A. Definition of Group Symmetry of Differential Equations. In: Group Theoretical Methods in Physics, v. 1. Proceedings of the Second Zvenigorod Seminar on Group Theoretical Methods in Physics. Ed. by M.A. Markov, V.I. Man'ko, A.E. Shabad. - Chur, London, Paris, New York: Harwood Academic Publishers, 1985, p. 507-516.

[9] Kotel'nikov G.A. Invariance of the Schrödinger Homogeneous Equation Relative to the Lie Algebra of Conformal Group C_{15}. Ibid., p. 517-520.

[10] Kotel'nikov G.A. Invariance of Maxwell Homogeneous Equations Relative to the Galilei Transformations. Ibid., p. 521-535.

[11] Котельников Г.А. Группа Галилея в исследованиях симметрийных свойств уравнений Максвелла. Общие соотношения. В кн.: Теоретико-групповые методы в физике, т. 1. Труды третьего семинара, Юрмала, 22-24 мая 1985. Изд. М.А. Марков, В.И. Манько, В.В. Додонов - М.: Наука, 1986, с. 466-479.

[12] Котельников Г.А. Группа Галилея в исследованиях симметрийных свойств уравнений Максвелла. Конкретные примеры. Там же: с. 479-490.

[13] Котельников Г.А. Группа Галилея в исследованиях симметрийных свойств уравнений Максвелла. Пространственно-временные преобразования, совместные с инвариантностью скорости света и единым временем Ньютона. Там же: с. 490-495.

[14] Kotel'nikov G.A. The Galilei Group in Investigations of Symmetry Properties of Maxwell Equations. In: Group Theoretical Methods in Physics, v. 2. Proceedings of the Third Yurmala Seminar, Yurmala, USSR, 22-24 May 1985. Ed. M.A. Markov, V.I. Man'ko, V.V. Dodonov - Utrecht, the Netherlands, VNU Science Press, 1986, p. 95-109.

[15] Котельников Г.А. Новое решение уравнений Максвелла: плоские продольные электромагнитные волны. В сб.: ВАНТ, сер. Общая и ядерная физика, вып. 4(40) - М., 1987, с. 58-59.

[16] Котельников Г.А. Групповые свойства уравнения Даламбера. (К 100-летию работы В. Фойгта "О принципе Доплера"). - Изв. ВУЗов, Физика, 1989, N 5, с. 127. Рукопись депонирована в ВИНИТИ, рег. N 7892-В88 от 04.11.88.

[17] Котельников Г.А. Новая алгебра внутренних симметрий уравнений Максвелла. - Письма в ЖЭТФ, 1989, т. 50, N 6, с. 265-267; - JETP Lett., v. 50, N 6, 1990, p. 293-296.

[18] Котельников Г.А. Квазар 3С273 гораздо ближе? В кн.: Экспериментальные тесты теории гравитации. Под редакцией В.Б. Брагинского и В.И. Денисова - М.: Изд. Мос. Унив., 1989, с. 218 -229.

[19] Котельников Г.А. Инвариантность уравнения светового конуса относительно преобразований Галилея. В сб.: ВАНТ, сер. Ядерно-физические исследования (Теория и эксперимент), вып. 5(13) - М., 1990, с. 47-48.

[20] Котельников Г.А. Специальная теория относительности с неинвариантной скоростью света. В сб.: ВАНТ, сер. Ядерно-физические исследования (Теория и эксперимент), вып. 11(19) - М.: 1990, с. 76-77.

[21] Котельников Г.А. Разложение преобразований обратных радиус-векторов на совокупность преобразований из группы Вейля. Конформная размерность электромагнитного поля. - Изв. ВУЗов, Физика, 1990, N 5, с. 9-13.

[22] Kotel'nikov G.A. The Galilei Symmetry in classical Electrodynamics. In: Integral Systems, Solid State Physics and Theory of Phase Transitions. Pt. 2. Symmetries and Algebraic Structures in Physics. Proceedings of the 18 International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, Moscow, USSR - June 4-9, 1990. Ed. V.V. Dodonov, V.I. Man'ko - New York: Nova Science Publishers Inc., Commack, 1991, p. 19-24.

[23] Kotel'nikov G.A. The Sign Invertion of the Speed of Light is the New Transformation of Discrete Symmetry in Electrodynamics. In: Symmetry Methods in Physics. Proceedings of the Fifth Workshop, Obninsk, July 1991 - Obninsk: 1992, p. 252-254.

[24] Котельников Г.А. Инверсия знака скорости света - новое преобразование дискретной симметрии в электродинамике. - Изв. ВУЗов, Физика, 1992, N 12, с. 69-72.

[25] Котельников Г.А. Новые алгебры инвариантности уравнений Максвелла. В сб.: ВАНТ, сер. Ядерно-физические исследования, вып. 3 - М., 1992, с. 69-72.

[26] Котельников Г.А. Алгоритм исследования и симметрии свободного уравнения Шредингера. - Препринт ИАЭ-5730/1. - М.: 1994, 18 с.

[27] Kotel'nikov G.A. Algorithm for Research of Mathematical Physics Equations Symmetries. Symmetries

of the free Schrödinger Equation. - Preprint IAE-5778/1. - M.: 1994, 21 p.; http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9612049, 14 p.

[28] Kotel'nikov G.A. About Nature of the Charge Conjugation in Quantum Theory. - Preprint IAE-5910/1. - M.: 1995, 7 p.; Доклад на научной конференции Отделения ЯФ РАН "Фундаментальные взаимодействия элементарных частиц", ИТЭФ, М., 23-27 окт. 1995; http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9703047, 8p.

[29] Котельников Г.А. К нелинейной электродинамике. - Изв. ВУЗов, Физика, 1995, N 2, с. 116-119.

[30] Kotel'nikov G.A. Nonlinear Maxwell Equations. - Preprint IAE-5881/1 - M.: 1995, 7 p.; http://xxx.lanl.gov/physics/9612002, 6 p.; J. Nonlinear Math. Phys. (Ukr.), 1996, v. 3, N 3-4, p. 391-395.

[31] Kotel'nikov G.A. New Symmetries in Mathematical Physics Equations. Preprint IAE-5925/1 - M.: 1995, 9 p.; http://xxx.lanl.gov/abs/physics/9701006, 9 p. In Book: VII International Conference "Symmetry Methods in Physics", v. 2, Ed. A.N. Sissakian, G.S. Pogosyan, Dubna, 1996, p. 358-363.

[32] Kotel'nikov G.A. "Minus c" Symmetry in Classical and Quantum Theories. Preprint IAE-6030/1, M., 1997, 18 p.; In Book of Abstracts: 5th International Conference on Squeezed States and Uncertainty Relations, Balatofured, Hungary, May 27-31, 1997, p. 67; Poster on VIII International Conference Symmetry Methods in Physics, July 28-Aug. 02, Dubna, 1997; http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9707003, 12 p.; Ядерная Физика, 4 с. - в печати; In Book: Photon and Poincaré Group, NY, Nova Science Publishers Inc., Commack, p. 128-141 - в печати.

[33] Kotel'nikov G.A. Universal Newton Time in Classical Electrodynamics. Elements of Physical Interpretation. Preprint IAE-6073/1, M., 1998, 22 p.; http://xxx.lanl.gov/abs/physics/9802038, 13 p.; Galilean Electrodynamics - в печати.

[34] Котельников Г.А. Специальная теория относительности с нарушенной инвариантностью скорости света. В кн.: Фундаментальные проблемы естествознания. Материалы международного научного конгресса. Санкт-Петербург, 1998, с. 103-104.

Подписано в печать 07.06.99. Формат 60x90/16
Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,5
Тираж 70. Заказ 38

Отпечатано в РНЦ ≪ Курчатовскийинститут ≫
123182, Москва, пл. Академика Курчатова